EXERCICE N°3 :	35'	6 points	

Soit g la fonction définie et **deux fois dérivable** sur IR ainsi que le tableau de variation de la fonction g' dérivée de g. On admet que $|g''(x)| < \frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		-1		4		5		6		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	
$g'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

1°) a) Déterminer le tableau de signe de g'.

b) Par une lecture du tableau de variation, déterminer, s'ils existent, les points d'inflexion de la courbe de g (en justifiant).

2°) • Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x}$.

• Soit h la fonction définie sur $]-\infty,5]$ par : $h(x) = f \circ g'(x)$.

• La courbe de h admet un point d'intersection avec la droite d'équation $y = x$ d'abscisse $\alpha \in [-1,4]$.

a) Montrer que h est dérivable sur $]-\infty, 5]$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ et $h(5)$.

c) Montrer que pour tout $x \in]-\infty,5]$, $h'(x) = g''(x)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{g'(x)}}\right)$.

d) Dresser le tableau de variation de h.

e) Montrer que $|h'(x)| < \frac{1}{2}$ pour tout $x \in [-1,4]$.

3°) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $-1 \le u_n \le 4$.

b) Montrer que pour tout $n \in IN$, $|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que pour tout $n \in IN$, $|u_n - \alpha| \le \frac{1}{2^{n-2}}$.

d) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

e) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0.5 sachant que $u_4 = 1,2$.

Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn